Modèle de Jordan pour une classe d'opérateurs de l'espace de Hilbert

Par BÉLA SZ.-NAGY à Szeged et CIPRIAN FOIAŞ à Bucarest

Introduction

Cette Note fait suite de la Note [2]. Là on a étudié les opérateurs T d'un espace de Hilbert (séparable, complexe) qui appartiennent à une des classes $C_0(N)$ [1]) et sont „sans multiplicité" dans un sens qu'on a précisé par une série de conditions équivalentes, l'une de ces conditions étant l'existence d'un vecteur cyclique pour T. On a démontré en particulier qu'un opérateur T de classe $C_0(N)$ admet un vecteur cyclique si T est quasi-similaire à un opérateur de classe $C_0(1)$ et dans ce cas seulement.

Or la classe $C_0(1)$ est constituée des opérateurs qui sont unitairement équivalents aux opérateurs $S(m)$ attachés à des fonctions intérieures non-constantes m (pour le disque unité); $S(m)$ est défini dans l'espace

$$\mathfrak{H}(m) = H^2 \ominus mH^2$$

par

$$S(m)u = P_{\mathfrak{H}(m)}(\lambda \cdot u(\lambda)), \quad \text{ou} \quad S(m)^* u = \frac{1}{\lambda}[u(\lambda) - u(0)],$$

$P_{\mathfrak{H}(m)}$ désignant la projection orthogonale de l'espace de Hardy H^2 dans son sous-espace $\mathfrak{H}(m)$.

Dans cette Note on envisagera des opérateurs appartenant à la classe plus générale C_0 et de multiplicité finie quelconque, au sens de la définition suivante:

Pour un opérateur borné quelconque T dans l'espace $\mathfrak{H}$, la *multiplicité* μ_T est le nombre cardinal minimum d'un sous-ensemble $\mathfrak{S}$ de $\mathfrak{H}$ tel que $\bigvee_{n=0}^{\infty} T^n \mathfrak{S} = \mathfrak{H}$. [2]) (Notons que $\mu_T = 1$ veut dire que T admet un vecteur cyclique.)

---

[1]) Pour les définitions voir les Préliminaires.

[2]) Dans la Note [3] on a employé la notation $\dim_T \mathfrak{H}$ pour μ_T.

Le résultat principal dans la partie I de cette Note est que tout opérateur T de classe C_0 aux multiplicités μ_T et μ_{T^*} finies, est quasi-similaire à un opérateur de la forme

$$(*) \qquad S(m_1)\oplus S(m_2)\oplus\cdots\oplus S(m_K)$$

où $m_1, m_2, \ldots, m_K$ sont des fonctions intérieures non-constantes dont chacune est un diviseur de la précédente; de plus cet opérateur est déterminé par T d'une manière univoque et on a $K=\mu_T=\mu_{T^*}$ (théorème 2).

Tel opérateur $(*)$ sera appelé un *opérateur de Jordan* et désigné aussi par $S(m_1, m_2, \ldots, m_K)$.

Comme une application du théorème 2 on démontre dans la partie II que pour tout opérateur T de type envisagé le bicommutant $(T)''$ est constitué des fonctions de T (au sens du chap. IV de [1]). Ce résultat (théorème 3) généralise le fait bien connu dans l'algèbre linéaire que le bicommutant d'une matrice carrée est constitué des polynômes de cette matrice.

Notre théorème 2 présente certaines intersections avec un théorème de KISILEVSKY [5], mais il y a une grande différence dans les sujets et les méthodes des deux recherches. Là, il s'agit des opérateurs bornés A dont la partie imaginaire $(A-A^*)/(2i)$ est non-négative et de trace finie, et dont le spectre est constitué du seul ponit 0. Cela correspond par la transformation de Cayley à une contraction faible (au sens du chap. VIII de [1]) de classe C_0, dont le spectre est constitué du seul point 1. Par contre, notre recherche concerne les opérateurs de classe C_0 de multiplicité finie (en particulier les opérateurs des classes $C_0(N)$), mais sans aucune restriction pour le spectre. Il y a aussi la différence que notre méthode est fondée sur les notions de „quasi-affinité" et de „quasi-similitude", tandis que M. Kisilevsky utilise une décomposition en „somme approximative" des espaces en question. Nous discuterons les relations entre ces notions, dans le cas qui nous intéresse, dans le n° 7.

Préliminaires

Rappelons la définition de la classe C_0 d'opérateurs (*cf.* [1] chap. III). C_0 est constituée des contractions complètement non-unitaires T d'un espace de Hilbert $\mathfrak{H}$, pour lesquelles il existe une fonction $u\in H^\infty$[3]) telle que $u\not\equiv 0$ et $u(T)=O$. Parmi ces fonctions il y a alors une fonction intérieure qui divise dans H^∞ toutes les autres; cette fonction intérieure est déterminée par T à un facteur constant de module 1 près et s'appelle la fonction minimum de T; on la désigne par m_T. Sauf pour l'opérateur O de l'espace banal $\{0\}$, la fonction m_T n'est pas constante. Inversement,

[3]) Les classes de Hardy envisagées sont celles pour le disque $|\lambda|<1$.

pour toute fonction intérieure non-constante m il existe un opérateur T de classe C_0 telle que $m_T = m$; tel est en particulier l'opérateur $S(m)$ envisagé dans l'Introduction.

La classe C_0 est contenue dans la classe C_{00}, composée des contractions T telles $T^n \to O$ et $T^{*n} \to O$ pour $n \to \infty$. Inversement, tout opérateur $T \in C_{00}$ dont les indices de défaut

$$\mathfrak{d}_T = \dim \overline{(I - T^*T)^{\frac{1}{2}} \mathfrak{H}}, \quad \mathfrak{d}_{T^*} = \dim \overline{(I - TT^*)^{\frac{1}{2}} \mathfrak{H}}$$

sont égaux à un nombre fini N, appartient à la classe C_0; la sous-classe de C_0 formée par ces opérateurs s'appelle classe $C_0(N)$ (*cf.* [1], n° IX. 3).

La classe $C_0(0)$ comprend le seul opérateur O de l'espace banal $\{0\}$. La classe $C_0(1)$ est constituée des opérateurs qui sont unitairement équivalents aux opérateurs $S(m)$ attachés aux fonctions intérieures m non-constantes. Ce fait se généralise pour tout $N \geqq 1$: la classe $C_0(N)$ est constituée des opérateurs qui sont unitairement équivalents aux opérateurs $S(\Theta)$ attachés aux fonctions intérieures matricielles $\Theta(\lambda)$ d'ordre N, contractives pures[4]). L'opérateur $S(\Theta)$ est défini notamment dans l'espace

$$\mathfrak{H}(\Theta) = H^2(E^N) \ominus \Theta H^2(E^N) \quad ^{5})$$

par

$$S(\Theta)u = P_{\mathfrak{H}(\Theta)}(\lambda\, u(\lambda)), \quad \text{ou} \quad S(\Theta)^* u = \frac{1}{\lambda}(u(\lambda) - u(0)).$$

Pour l'opérateur $S(\Theta)$, la fonction minimum se calcule comme le quotient du déterminant de la matrice $\Theta(\lambda)$ par le plus grand diviseur intérieur commun des déterminants mineurs d'ordre $N-1$ de cette matrice. *Cf.* [1], chap. VI, en particulier le théorème VI. 5. 2.

Pour $T \in C_0$ on a $T^* \in C_0$ et $m_{T^*} = m_T^{\tilde{}}$, et pour T unitairement équivalent à $S(\Theta) \in C_0(N)$, T^* est unitairement équivalent à $S(\Theta^{\tilde{}}) \in C_0(N)$; [6]) *cf.* [1], chap. VI, théorème 3. 1 et formule (1. 6).[7]) Pour $T \in C_0(N)$ la restriction de T à un sous-espace invariant quelconque appartient à une classe $C_0(N')$ avec $N' \leqq N$; *cf.* le lemme IX. 3. 1 de [1].

---

[4]) C'est-à-dire que la fonction $\Theta(\lambda)$ est définie et holomorphe dans le disque $|\lambda| < 1$, ses valeurs sont des contractions dans l'espace euclidien complexe E^N, la limite radiale $\Theta(e^{it})$ est un opérateur isométrique (donc aussi unitaire) dans E^N pour presque tous les points e^{it} du cercle unité, et de plus $\|\Theta(0)x\| < \|x\|$ pour tout vecteur non-nul x de E^N.

[5]) $H^2(E^N)$ est l'espace hilbertien de Hardy des fonctions $u = u(\lambda)$ à valeurs vecteurs dans E^N. Pour $N=1$ il s'agit donc de l'espace H^2 ordinaire.

[6]) Pour une fonction $\Theta(\lambda)$ à valeurs opérateurs on définit $\Theta^{\tilde{}}(\lambda) = \Theta(\bar{\lambda})^*$; pour une fonction scalaire cette définition se réduit à $m^{\tilde{}}(\lambda) = \overline{m(\bar{\lambda})}$.

[7]) Une transformation unitaire $u \to v = \Psi u$ de l'espace $\mathfrak{H}(\Theta)$ sur l'espace $\mathfrak{H}(\Theta^{\tilde{}})$ par laquelle l'opérateur $S(\Theta)^*$ est transformé en l'opérateur $S(\Theta^{\tilde{}})$, est définie par $v(z) = \bar{z} \cdot \Theta^{\tilde{}}(z) u(\bar{z})$ $(z = e^{it})$; *cf.* [4], n° 4. On a notamment $\Psi S(\Theta)^* = S(\Theta^{\tilde{}})\Psi$.

Pour tout opérateur $T \in C_{00}$ on a $\mu_T \leqq \mathfrak{d}_{T^*}$ et $\mu_{T^*} \leqq \mathfrak{d}_T$; *cf.* le n° 1 de [3]. En particulier, pour $T \in C_0(N)$ on a donc

$$(\ast) \qquad \mu_T,\ \mu_{T^*} \leqq N.$$

Proposition A. (Proposition 1 dans [2].) *Si l'opérateur $T \in C_0(N)$ admet un vecteur cyclique, il en est de même de T^* ainsi que de toute restriction de T à un sous-espace invariant.*

Proposition B. (Théorème 1 dans [2].) *Pour tout opérateur $T \in C_0(N)$ il existe un sous-espace invariant $\mathfrak{L}$ tel que la restriction $T' = T|\mathfrak{L}$ admette un vecteur cyclique dans $\mathfrak{L}$ et qu'on ait $m_{T'} = m_T$.*

Un opérateur borné X d'un espace $\mathfrak{H}_1$ à un espace $\mathfrak{H}_2$ est appelé une *quasi-affinité* s'il admet un inverse à domaine dense dans $\mathfrak{H}_2$. Un opérateur borné T_1 dans $\mathfrak{H}_1$ s'appelle une *transformée quasi-affine* d'un opérateur borné T_2 dans $\mathfrak{H}_2$, s'il existe une quasi-affinité X de $\mathfrak{H}_1$ à $\mathfrak{H}_2$ telle que $T_2 X = X T_1$. Nous voulons indiquer cette relation aussi par la notation

$$T_1 \prec T_2 \quad \text{ou} \quad T_2 \succ T_1.$$

Cette relation d'ordre partiel est transitif et $T_1 \prec T_2$ entraîne $T_1^* \succ T_2^*$. Si de plus $T_1, T_2 \in C_0$, on a $m_{T_1} = m_{T_2}$.

Deux opérateurs dont chacun est une transformée quasi-affine de l'autre, sont dits *quasi-similaires*.

Proposition C. *La multiplicité μ_T est invariante par rapport à une quasi-similitude. De plus, $T_1 \prec T_2$ entraîne $\mu_{T_1} \geqq \mu_{T_2}$.*

En effet, si $\mathfrak{S}_1$ est un ensemble de vecteurs dans l'espace $\mathfrak{H}_1$, de cardinalité μ_T et tel que $\bigvee_{n=0}^{\infty} T_1^n \mathfrak{S}_1 = \mathfrak{H}_1$, et si X est une quasi-affinité de $\mathfrak{H}_1$ à $\mathfrak{H}_2$ telle que $T_2 X = X T_1$, on a $T_2^n X = X T_1^n$ $(n = 0, 1, \dots)$ et par conséquent

$$\bigvee_{n=0}^{\infty} T_2^n X \mathfrak{S}_1 = \bigvee_{n=0}^{\infty} X T_1^n \mathfrak{S}_1 = \overline{X \bigvee_{n=0}^{\infty} T_1^n \mathfrak{S}_1} = \overline{X \mathfrak{H}_1} = \mathfrak{H}_2,$$

d'où on déduit que μ_{T_2} est au plus égale à la cardinalité de l'ensemble $\mathfrak{S}_2 = X \mathfrak{S}_1$, donc à μ_{T_1}.

Proposition D. (Proposition 1 dans [3].) *Tout opérateur $T \in C_0$ admet comme transformée quasi-affine un opérateur $T_1 \in C_0$ dont les indices de défaut sont égaux à μ_T. Si $\mu_T < \infty$, on a donc $T_1 \in C_0(N)$ avec $N = \mu_T$.*

Terminons par remarquer que pour tout opérateur T dans l'espace E^N, de norme $\|T\| < 1$, on a $T \in C_0(N)$. Il s'ensuit que les résultats de cette Note s'appliquent en particulier aux matrices carrées finies, donc présentent des généralisations de certains faits appartenant à l'algèbre linéaire.

PARTIE I

1. Trois propositions et deux théorèmes

1. Il s'agit des propositions suivantes:

Proposition 1. *Pour tout opérateur T dans l'espace $\mathfrak{H}$, appartenant à une classe $C_0(N)$ $(N \geqq 1)$, il existe une décomposition de $\mathfrak{H}$ en somme $\mathfrak{L} \oplus \mathfrak{M}$ de deux sous-espaces orthogonaux dont $\mathfrak{M}$ est invariant pour T, telle que dans la matrice correspondante $T = \begin{bmatrix} T_{\mathfrak{L}} & O \\ * & T_{\mathfrak{M}} \end{bmatrix}$ l'opérateur $T_{\mathfrak{L}}$ (de $\mathfrak{L}$) admette un vecteur cyclique et ait la même fonction minimum que T: $m_{T_{\mathfrak{L}}} = m_T$. Dans ce cas on a de plus*

$$T \succ S(m_T) \oplus T_{\mathfrak{M}}.$$

Proposition 2. *Soient $m_1, \ldots, m_K$ des fonctions intérieures ayant pour diviseur commun une fonction intérieure non-constante m. Supposons que l'opérateur $S(m_1) \oplus \cdots \oplus S(m_K)$ est la transformée quasi-affine d'un opérateur T de classe $C_0(N)$. On a alors $K \leqq N$.*

Proposition 3. *Soient $S(m_1, \ldots, m_K)$ et $S(m'_1, \ldots, m'_{K'})$ deux opérateurs de Jordan dont le premier est une transformée quasi-affine du second. On a alors $K' = K$ et $m'_i = m_i$ $(i = 1, \ldots, K)$, donc les deux opérateurs coïncident.*

On démontrera ces propositions dans les n^{os} 2—4.

2. Ici nous en déduisons d'abord le suivant

Théorème 1. *Pour tout opérateur $T \in C_0$, de multiplicité μ_T finie, il existe un opérateur de Jordan $S(m_1, \ldots, m_K)$ tel que*

$$T \succ S(m_1, \ldots, m_K). \tag{1.1}$$

Démonstration. En vertu de la proposition D il existe un opérateur $T_1 \in C_0(N_1)$ tel que $N_1 = \mu_T$ et

$$T \succ T_1. \tag{1.2}$$

D'après la proposition 1 il existe une restriction T_2 de T_1 à un sous-espace invariant $\mathfrak{M}_1$ telle qu'on ait

$$T_1 \succ S(m_1) \oplus T_2$$

où $m_1 = m_{T_1}$ $(= m_T)$. Etant une restriction de T_1, l'opérateur T_2 appartient à une classe $C_0(N_2)$ et m_{T_2} est un diviseur de m_1. Si $N_2 \geqq 1$, on peut appliquer le même raisonnement à T_2 au lieu de T_1, et on obtient alors que

$$T_1 \succ S(m_1) \oplus S(m_2) \oplus T_3$$

où $m_2 = m_{T_2}$, T_3 est une restriction de T_2 à un sous-espace invariant et par conséquent appartient à une classe $C_0(N_3)$, et m_{T_3} est un diviseur de m_2. Ce procédé ne peut être continué indéfiniment. En effet, si l'on a obtenu que

$$T_1 \succ S(m_1) \oplus \cdots \oplus S(m_k) \oplus T_{k+1}$$

pour certaines fonctions intérieures non-constantes $m_1, \ldots, m_K$ (dont chacune est un diviseur de la précédente) et pour un opérateur T_{k+1}, alors $S(m_1) \oplus \cdots \oplus S(m_k)$ est la transformée quasi-affine de la restriction de T_1 à un certain sous-espace invariant[8]; comme cette restriction appartient à une classe $C_0(N')$ avec $N' \leqq N_1$, il s'ensuit de la proposition 2 que $k \leqq N'$ $(\leqq N_1)$. Or le procédé ne s'arrête à l'étape k-ième que si T_{k+1} est l'opérateur dans l'espace banal $\{0\}$. On conclut qu'il existe un opérateur de Jordan $S(m_1, \ldots, m_K)$ tel que

$$T_1 \succ S(m_1, \ldots, m_K). \tag{1.3}$$

Les relations (1. 2) et (1. 3) entraînent la relation (1. 1).

Il manifeste que la fonction minimum d'un opérateur de Jordan $S(m_1, \ldots, m_K)$ est égale à m_1. Il s'ensuit que *pour tout opérateur de Jordan vérifiant la relation* (1. 1) *on a* $m_1 = m_T$.

Le résultat principal de cette partie est contenu dans le

Théorème 2. *Pour un opérateur T de classe C_0 et aux multiplicités μ_T, μ_{T^*} finies, il existe un opérateur de Jordan et un seul qui vérifie la relation* (1. 1). *Cet opérateur est même quasi-similaire à T et on a*

$$K = \mu_T = \mu_{T^*}; \tag{1.4}$$

on l'appellera le modèle de Jordan de T.

Remarque. Grâce aux inégalités (⁑) dans les Préliminaires, le théorème 2 s'applique en particulier aux opérateurs des classes $C_0(N)$, $N \geqq 1$.

Démonstration. En vertu de la proposition D il existe un opérateur $T_{1*} \in C_0(N_{1*})$ tel que $N_{1*} = \mu_{T^*}$ et $T^* \succ T_{1*}$. On a alors aussi $T_{1*}^* \in C_0(N_{1*})$ et

$$T_{1*}^* \succ T. \tag{1.5}$$

Envisageons deux opérateurs de Jordan, $S = (m_1, \ldots, m_K)$ et $S' = S(m'_1, \ldots, m'_{K'})$, tels que $T \succ S$, $T^* \succ S'$ et d'ailleurs quelconques; l'existence de tels opérateurs est

[8]) En effet, soient A et B deux opérateurs tels que $B \succ A$, et soit $\mathfrak{L}$ un sous-espace invariant pour A. Si X est une quasi-affinité telle que $BX = XA$, alors $\mathfrak{M} = \overline{X\mathfrak{L}}$ est un sous-espace invariant pour B, $X' = X|\mathfrak{L}$ est une quasi-affinité de $\mathfrak{L}$ à $\mathfrak{M}$, et on a $(B|\mathfrak{M})X' = X'(A|\mathfrak{L})$.

assuré par le théorème 1. On a alors

$$S'^{*} \succ T \succ S. \tag{1.6}$$

Or S'^{*} est unitairement équivalent à l'opérateur de Jordan $S'^{\sim} = S(m_1'^{\sim}, \ldots, m_{K'}'^{\sim})$, donc il dérive de (1. 6) par la proposition 3 que $S' = S$. Vu que S et $S'^{\sim}$ étaient choisis indépendamment l'un de l'autre, une des conséquences de cette égalité est que S est déterminé par T d'une manière univoque. En vertu de (1. 6), une autre conséquence est que T est quasi-similaire à S.

Reste à démontrer (1. 4). En vertu de la proposition C on a $\mu_T = \mu_S$. D'autre part on a $\mu_S \leqq K$ parce que $S \in C_0(K)$.[9]) Finalement, comme (1. 5) et (1. 6) entraînent $T_{1*}^{*} \succ S$ et que $T_{1*}^{*} \in C_0(\mu_{T^*})$, il s'ensuit par la proposition 2 que $K \leqq \mu_{T^*}$. Ainsi, nous avons

$$\mu_T \leqq K \leqq \mu_{T^*}.$$

Vu la symétrie des hypothèses faites en T et T^*, on doit avoir au côté de l'inégalité $\mu_T \leqq \mu_{T^*}$ aussi celle opposée $\mu_{T^*} \leqq \mu_T$. Donc $\mu_T = \mu_{T^*} = K$. Cela achève la démonstration.

En vertu de la proposition 3, le théorème 2 admet le suivant:

Corollaire 1. *Soient T et T' des opérateurs de type envisagé dans le théorème 2. Si $T \succ T'$, alors T et T' ont le même modèle de Jordan. Inversement, si T et T' ont le même modèle de Jordan, alors T et T' sont quasi-similaires.*

Remarque 1. Dans [2], n° 8, on a construit un opérateur de classe $C_0(2)$ et un opérateur de classe $C_0(1)$, qui sont quasi-similaires sans être similaires. Ainsi il n'est pas possible de remplacer, dans le corollaire ci-dessus, quasi-similitude par similitude.

Remarque 2. Nous savons que pour tout opérateur de Jordan vérifiant la relation (1. 1) on a $m_1 = m_T$. Pour T unitairement équivalent à un opérateur $S(\Theta) \in C_0(N)$, la fonction m_1 se calcule donc comme le déterminant de la matrice Θ divisé par le plus grand diviseur intérieur commun des déterminants mineurs d'ordre $N-1$. Il est fort probable que les autres fonctions dans la suite $m_1, \ldots, m_K$ peuvent être calculés d'une manière analogue.

Tout de même, il y a une relation utile que nous pouvons établir pour ce cas, notamment la suivante:

$$\text{dét}\, \Theta(\lambda) = m_1(\lambda) \cdots m_K(\lambda). \tag{1.7}$$

[9]) En effet, on a $S = S(\Theta)$ pour la fonction matricielle $\Theta(\lambda)$ d'ordre K, de type diagonal, dont les éléments à la diagonale sont les fonctions scalaires $m_1, \ldots, m_K$. Cette fonction est évidemment intérieure et contractive pure.

Démonstration. Comme la fonction $\Theta(\lambda)$ coïncide avec la fonction caractéristique $\Theta_T(\lambda)$, son déterminant coïncide avec le déterminant $d_T(\lambda)$ de la fonction caractéristique de T. On fera l'induction sur K. Lorsque $K(=\mu_T)=1$, on a $d_T=m_T$ en vertu du théorème 2 de [2], ce qui prouve (1. 7) dans ce cas. Supposons que (1. 7) soit vérifiée pour $K=k-1$ et montrons qu'elle est alors vérifiée pour $K=k$ aussi. Soit donc $T\in C_0(N)$ tel que $K(=\mu_T)=k$. D'après la proposition 1 il existe une décomposition de l'espace de T en somme vectorielle de deux sous-espaces orthogonaux, soit $\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{M}$, telle que $\mathfrak{M}$ soit invariant pour T et que, en posant $T_{\mathfrak{M}}=T|\mathfrak{M}$ et $T_{\mathfrak{L}}=(T^*|\mathfrak{L})^*$, $T_{\mathfrak{L}}$ ait un vecteur cyclique et vérifie la relation $m_{T_{\mathfrak{L}}}=m_T$. En vertu du lemme IX. 3. 1 de [1] on a alors pour les déterminants des fonctions caractéristiques correspondantes: $d_T=d_{T_{\mathfrak{L}}}d_{T_{\mathfrak{M}}}$. En vertu de la proposition 1 on a aussi: $T\succ S(m_T)\oplus T_{\mathfrak{M}}$. Soit $S(m'_1,\ldots,m'_{K'})$ le modèle de Jordan de $T_{\mathfrak{M}}$; $m'_1(=m_{T_{\mathfrak{M}}})$ est alors un diviseur de $m_1(=m_T)$. Il s'ensuit que $T\succ S(m_1,m'_1,\ldots,m'_{K'})$, d'où il dérive grâce à l'unicité du modèle que $K'=K-1=k-1$ et $m'_i=m_{i+1}$ $(i=1,\ldots,k-1)$. Par l'hypothèse d'induction on a $d_{T_{\mathfrak{M}}}=m'_1\ldots m'_{k-1}=m_2\ldots m_k$; d'autre part on a $d_{T_{\mathfrak{L}}}=m_{T_{\mathfrak{L}}}$ $(=m_T=m_1)$ parce que $T_{\mathfrak{L}}$ admet un vecteur cyclique. On conclut que

$$d_T=d_{T_{\mathfrak{L}}}d_{T_{\mathfrak{M}}}=m_1m_2\cdots m_k$$

ce qui achève la démonstration.

Notons la conséquence suivante de la relation (1. 7):

Corollaire 2. *Un opérateur T d'une classe $C_0(N)$ $(N\geqq 1)$ et sa restriction T' à un sous-espace invariant propre ne peuvent avoir le même modèle de Jordan.*

Démonstration. Si $T=\begin{bmatrix}T' & *\\ O & T''\end{bmatrix}$ est la triangulation de T par rapport au sous-espace invariant en question et son complément orthogonal, on a $d_T=d_{T''}d_{T'}$ où la fonction $d_{T''}$ n'est pas constante (de module 1) parce que $d_{T''}(T'')=O$. Si T et T' avaient le même modèle de Jordan, on aurait $d_T=d_{T'}$ en vertu de (1. 7); contradiction.

2. Démonstration de la proposition 1

Soit T un opérateur dans l'espace $\mathfrak{H}$, de classe $C_0(N)$, $N\geqq 1$. Comme T^* est alors de même type, on obtient par la proposition B qu'il existe un sous-espace $\mathfrak{L}$ invariant pour T^* tel que $T^*|\mathfrak{L}$ admette un vecteur cyclique dans $\mathfrak{L}$ et qu'on ait

$$m_{T^*|\mathfrak{L}}=m_{T^*}. \tag{2. 1}$$

Comme $\mathfrak{M}=\mathfrak{H}\ominus\mathfrak{L}$ est alors invariant pour T, la décomposition

$$\mathfrak{H}=\mathfrak{L}\oplus\mathfrak{M}$$

engendre pour T et pour la projection orthogonale $P_{\mathfrak{L}}$ de $\mathfrak{H}$ à $\mathfrak{L}$ les formes matricielles

$$T = \begin{bmatrix} T_{\mathfrak{L}} & O \\ * & T_{\mathfrak{M}} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad P_{\mathfrak{L}} = \begin{bmatrix} I_{\mathfrak{L}} & O \\ O & O \end{bmatrix},$$

d'où l'on obtient pour $n=0, 1, 2, \ldots$

(2. 2) $$P_{\mathfrak{L}} T^n = \begin{bmatrix} I_{\mathfrak{L}} & O \\ O & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{\mathfrak{L}}^n & O \\ * & T_{\mathfrak{M}}^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{\mathfrak{L}}^n & O \\ O & O \end{bmatrix} = T_{\mathfrak{L}}^n P_{\mathfrak{L}}.$$

Comme on a $T_{\mathfrak{L}} = (T^*|\mathfrak{L})^*$, il s'ensuit de la proposition A que $T_{\mathfrak{L}}$ admet aussi un vecteur cyclique, soit f, donc on a

$$\mathfrak{L} = \bigvee_{n=0}^{\infty} T_{\mathfrak{L}}^n f.$$

Posons

$$\mathfrak{L}_1 = \bigvee_{n=0}^{\infty} T^n f;$$

de (2. 2) il résulte aussitôt que

(2. 3) $$\mathfrak{L} = \overline{P_{\mathfrak{L}} \mathfrak{L}_1}.$$

De plus, comme $f \in \mathfrak{L} \cap \mathfrak{L}_1$, on a

$$u(T_{\mathfrak{L}})f = P_{\mathfrak{L}} u(T) f = P_{\mathfrak{L}} u(T|\mathfrak{L}_1) f$$

pour toute fonction $u \in H^\infty$. On a donc en particulier

$$m_{T|\mathfrak{L}_1}(T_{\mathfrak{L}}) f = 0.$$

Puisque f est cyclique pour $T_{\mathfrak{L}}$, cela entraîne

(2. 4) $$m_{T|\mathfrak{L}_1}(T_{\mathfrak{L}}) = O.$$

Or (2. 1) entraîne

(2. 5) $$m_{T_{\mathfrak{L}}} = m_{(T^*|\mathfrak{L})^*} = (m_{T^*|\mathfrak{L}})^{\tilde{}} = (m_{T^*})^{\tilde{}} = m_T.$$

Ainsi on déduit de (2. 4) que m_T doit être un diviseur de $m_{T|\mathfrak{L}_1}$. Comme $T|\mathfrak{L}_1$ est la restriction de T à un sous-espace invariant, on conclut que

(2. 6) $$m_{T|\mathfrak{L}_1} = m_T.$$

Comme $T|\mathfrak{L}_1$ appartient à une classe $C_0(N_1)$, $N_1 \leqq N$, et admet le vecteur cyclique f, on déduit de la proposition D et de (2. 6) que $T|\mathfrak{L}_1 \succ S(m_T)$; donc il existe une quasi-affinité

$$X\colon \mathfrak{H}(m_T) \to \mathfrak{L}_1$$

telle que

(2. 7) $$X S(m_T) = (T|\mathfrak{L}_1) X = TX.$$

D'autre part, (2. 5) entraîne

$$m_{T_{\mathfrak{L}}^*} = (m_{T_{\mathfrak{L}}})^{\tilde{}} = (m_T)^{\tilde{}} = (m_{S(m_T)})^{\tilde{}} = m_{S(m_T)^*} = m_{S(m_{\tilde{T}})},$$

et il s'ensuit de nouveau de la proposition D que $T_{\mathfrak{L}}^* \succ S(m_{\tilde{T}}) \left(\succ S(m_T)^*\right)$ et que par conséquent $T_{\mathfrak{L}} \prec S(m_T)$. Donc il existe une quasi-affinité

$$Y\colon \mathfrak{L} \to \mathfrak{H}(m_T)$$

telle que

$$S(m_T)Y = YT_{\mathfrak{L}}. \tag{2. 8}$$

Ecrivons, pour simplifier, m au lieu de m_T et définissons

$$\mathfrak{H}' = \mathfrak{H}(m) \oplus \mathfrak{M} \quad \text{et} \quad T' = S(m) \oplus T_{\mathfrak{M}};$$

T' est une contraction dans $\mathfrak{H}'$.

Nous voulons montrer que $T' \prec T$. A cet effet, envisageons l'opérateur

$$X'\colon \mathfrak{H}' \to \mathfrak{H},$$

défini par la formule

$$X'(g \oplus h) = Xg + h \quad \text{pour} \quad g \in \mathfrak{H}(m) \quad \text{et} \quad h \in \mathfrak{M}. \tag{2. 9}$$

X' est évidemment linéaire et borné, et (2. 7) entraîne que

$$TX'(g \oplus h) = T(Xg + h) = XS(m)g + T_{\mathfrak{M}}h =$$
$$= X'\left(S(m)g \oplus T_{\mathfrak{M}}h\right) = X'T'(g \oplus h),$$

d'où

$$TX' = X'T'. \tag{2. 10}$$

Reste à montrer que X' est une quasi-affinité de $\mathfrak{H}'$ à $\mathfrak{H}$, c'est-à-dire que

$$\overline{X'\mathfrak{H}'} = \mathfrak{H} \tag{2. 11}$$

et que

$$X'(g \oplus h) = 0 \quad \text{entraîne} \quad g \oplus h = 0. \tag{2. 12}$$

Or, la relation (2. 11) dérive d'une manière simple des relations (2. 9) et (2. 3) et de ce que X est une quasi-affinité de $\mathfrak{H}(m)$ à $\mathfrak{L}_1$. On a notamment

$$\overline{X'\mathfrak{H}'} = \overline{X\mathfrak{H}(m) + \mathfrak{M}} = \overline{\mathfrak{L}_1 + \mathfrak{M}} = \overline{P_{\mathfrak{L}}\mathfrak{L}_1 + \mathfrak{M}} = \overline{\mathfrak{L} + \mathfrak{M}} = \mathfrak{L} \oplus \mathfrak{M} = \mathfrak{H}.$$

Quant à (2. 12), cela veut dire que $Xg = -h$ pour un $g \in \mathfrak{H}(m)$ et un $h \in \mathfrak{M}$ entraîne $g = 0$, c'est-à-dire que l'opérateur $P_{\mathfrak{L}}X$ est inversible, ou, ce qui revient au même, que l'opérateur

$$W = YP_{\mathfrak{L}}X\colon \mathfrak{H}(m) \to \mathfrak{H}(m)$$

est inversible.

Observons d'abord que par (2. 3) et puisque X et Y sont des quasi-affinités, on a

(2. 13) $$\overline{W\mathfrak{H}(m)} = \overline{YP_{\mathfrak{L}}X\mathfrak{H}(m)} = \overline{YP_{\mathfrak{L}}\mathfrak{L}_1} = \overline{Y\mathfrak{L}} = \mathfrak{H}(m).$$

D'autre part, on déduit de (2. 2), (2. 7) et (2. 8) que

$$S(m)\,W = S(m)Y\,P_{\mathfrak{L}}\,X = YT_{\mathfrak{L}}P_{\mathfrak{L}}X = YP_{\mathfrak{L}}TX = YP_{\mathfrak{L}}XS(m) = W\,S(m).$$

Faisons usage d'un théorème de Sarason [6] suivant lequel tout opérateur borné permutable à $S(m)$ est de la forme $\varphi(S(m))$ avec $\varphi\in H^\infty$. Donc on a

(2. 14) $$W = w(S(m)) \quad \text{où} \quad w\in H^\infty.$$

Puisque (2. 13) entraîne $W\neq O$, on a certainement $w\not\equiv 0$.

Soit $g\in\mathfrak{H}(m)$ tel que $Wg=0$; par (2. 14) cela veut dire que

$$P_{\mathfrak{H}(m)}wg=0, \quad \text{donc} \quad wg\in mH^2, \qquad wg=mu,$$

avec un $u\in H^2$. Supposons que $g\not\equiv 0$. On a alors aussi $u\not\equiv 0$ et par conséquent nous pouvons prendre les factorisations canoniques

$$w = w_i w_e, \quad g = g_i g_e, \quad u = u_i u_e$$

des fonctions $w\in H^\infty$ et $g, u\in H^2$, en produit de leurs facteurs intérieurs et extérieurs. La relation $wg=mu$ entraîne $w_i g_i = m u_i$ et par conséquent

$$g_i w = mw' \quad \text{avec} \quad w' = u_i w_e \in H^2,$$

d'où

$$g_i(S(m))\,w(S(m)) = m(S(m))\,w'(S(m)) = O$$

parce que $m(S(m))=O$. Grâce à la relation (2. 13) on en déduit que $g_i(S(m))=O$, ce qui veut dire que

$$P_{\mathfrak{H}(m)}(g_i v)=0, \quad \text{donc} \quad g_i v\in mH^2$$

pour toute fonction $v\in\mathfrak{H}(m)$. Choisissons en particulier $v = 1-\overline{m(0)}m$: nous obtenons ainsi que $g_i\in mH^2$, donc $g_i=mh$, avec un $h\in H^2$. Comme g_i et m sont des fonctions intérieures, il en est de même de h. On a donc $g=mhg_e\in mH^2$. Comme $g\in\mathfrak{H}(m)$, on conclut que $g=0$: contradiction. Donc $Wg=0$ entraîne $g=0$: W est inversible, et la démonstration est terminée.

3. Démonstration de la proposition 2

1. Nous commençons par un lemme qui nous sera utile aussi dans le n°5.

Lemme 1. *Soient m et m' deux fonctions intérieures non-constantes, dont m est un diviseur de m', donc*

(3. 1) $$m' = mq$$

avec une fonction q intérieure. Envisageons les espaces

$$\mathfrak{H}=\mathfrak{H}(m) \quad (=H^2\ominus mH^2), \qquad \mathfrak{H}'=\mathfrak{H}(m') \quad (=H^2\ominus m'H^2)$$

et leurs opérateurs $S=S(m)$ *et* $S'=S(m')$. *Dans ces conditions,*

$$\mathfrak{H}^0 = qH^2\ominus m'H$$

est un sous-espace de $\mathfrak{H}'$ *invariant pour* S' *et l'opérateur* $S^0=S'|\mathfrak{H}^0$ *est unitairement équivalent à* S. *Notamment,* $R\colon u\to qu \quad (u\in\mathfrak{H})$ *est une transformation unitaire de* $\mathfrak{H}$ *à* $\mathfrak{H}^0$ *et on a*

$$S^0R=RS. \tag{3.2}$$

D'autre part, l'opérateur $q(S')$ *applique* $\mathfrak{H}'$ *sur* $\mathfrak{H}^0$ *et l'opérateur*

$$Q=R^{-1}q(S') \tag{3.3}$$

applique $\mathfrak{H}'$ *sur* $\mathfrak{H}$:

$$Q\mathfrak{H}'=\mathfrak{H}. \tag{3.4}$$

De plus on a

$$SQ=QS'. \tag{3.5}$$

Démonstration. Le fait que R est unitaire, de $\mathfrak{H}$ à $\mathfrak{H}^0$, découle immédiatement de (3. 1) et de ce que q est une fonction intérieure.

Observons ensuite que pour $v\in\mathfrak{H}$ et $u=qv$ $(\in\mathfrak{H}^0)$ on a

$$q\cdot Sv = q\cdot P_{\mathfrak{H}}(\lambda v) = q(\lambda v+mv_1) = \lambda u+m'w_1$$

et

$$S'u = P_{\mathfrak{H}'}(\lambda u) = \lambda u+m'w_2$$

où $w_1, w_2\in H^2$. Il s'ensuit que

$$S'u-q\cdot Sv\in m'H^2.$$

D'autre part, $S'u\in\mathfrak{H}'$ et $q\cdot Sv\in q\mathfrak{H}=\mathfrak{H}^0\subset\mathfrak{H}'$, donc $S'u-q\cdot Sv\in\mathfrak{H}'$. Ainsi on a nécessairement $S'u-q\cdot Sv=0$, donc

$$S'(qv) = q\cdot Sv \qquad (v\in\mathfrak{H}).$$

Cela montre que $\mathfrak{H}^0$ $(=q\mathfrak{H})$ est invariant pour S' et que $S^0=S'|\mathfrak{H}^0$ vérifie la relation (3. 2).

Observons ensuite que

$$q(S')\mathfrak{H}' = P_{\mathfrak{H}'}(q\mathfrak{H}') = P_{\mathfrak{H}'}q(H^2\ominus m'H^2) =$$
$$= P_{\mathfrak{H}'}[q(H^2\ominus mH^2)\oplus m'(H^2\ominus qH^2)] = P_{\mathfrak{H}'}(q\mathfrak{H}) = P_{\mathfrak{H}'}\mathfrak{H}^0 = \mathfrak{H}^0$$

parce que $\mathfrak{H}^0\subset\mathfrak{H}'$. En appliquant R^{-1} on en déduit la relation (3. 4). Finalement, (3. 1) et (3. 2) entraînent

$$SQ=SR^{-1}q(S')=R^{-1}S^0q(S')=R^{-1}S'q(S')=R^{-1}q(S')S'=QS',$$

c'est-à-dire la relation (3. 5). Le lemme est démontré.

2. Pour démontrer la proposition 2, envisageons des fonctions intérieures $m_1, \ldots, m_K$ ayant pour diviseur intérieur commun une fonction intérieure non-constante m, et supposons que l'opérateur $S(m_1)\oplus\cdots\oplus S(m_K)$ est la transformée quasi-affine d'un opérateur T de classe $C_0(N)$. D'après le lemme 1 l'opérateur $S(m)$ est, pour $k=1, \ldots, K$, unitairement équivalent à la restriction de $S(m_k)$ à un sous-espace invariant; par conséquent l'opérateur

$$S^{(K)}(m) = S(m)\oplus\cdots\oplus S(m) \qquad (K \text{ termes})$$

est unitairement équivalent à la restriction de $S(m_1)\oplus\cdots\oplus S(m_K)$ à un sous-espace invariant. Mais alors $S^{(K)}(m)$ est la transformée quasi-affine d'une restriction T' de T à un sous-espace invariant (voir [8]), donc d'un opérateur de classe $C_0(N')$ avec $N'\leqq N$. Si l'on montre que cela entraîne $K\leqq N'$, on aura démontré à fortiori $K\leqq N$.

Il est manifeste que T' peut être remplacé dans nos considérations par son modèle fonctionnel, c'est-à-dire par un opérateur $S(\Theta)$ où Θ est une fonction matricielle d'ordre N', contractive pure et intérieure. D'autre part, $S^{(K)}(m)$ est évidemment égal à $S(m\, I_K)$ où I_K désigne l'opérateur unité dans E^K.

Par l'hypothèse faite, il existe une quasi-affinité

$$X\colon \ \mathfrak{H}(m\, I_K) \to \mathfrak{H}(\Theta)$$

pour laquelle

(3.6) $$S(\Theta)X = X\, S(mI_K).$$

Cela entraîne, en vertu de la généralisation du théorème de Sarason donnée par les auteurs dans [4], qu'il existe une fonction analytique bornée $\{E^K, E^{N'}, A(\lambda)\}$ telle que

(3.7) $$X = P_{\mathfrak{H}(\Theta)} A | \mathfrak{H}(m\, I_K).$$

D'autre part, on déduit de (3.6) que l'opérateur $S(\Theta)$ a la même fonction minimum que l'opérateur $S(m\, I_K)$, donc m. Par conséquent il existe une fonction matricielle analytique bornée $\Omega(\lambda)$, d'ordre N', telle que

(3.8) $$\Omega(\lambda)\Theta(\lambda) = \Theta(\lambda)\Omega(\lambda) = m(\lambda)\, I_{N'}.\text{[10]}$$

Envisageons alors la fonction analytique bornée $\{E^K, E^{N'}, B(\lambda)\}$ définie par

$$B(\lambda) = \Omega(\lambda)A(\lambda)$$

et soit

$$u\in H^2(E^K) \quad \text{tel que} \quad Bu\in m H^2(E^{N'}).$$

[10]) $\Omega(\lambda)$ est l'adjointe algébrique de la matrice $\Theta(\lambda)$, divisée par le plus grand diviseur intérieur de ses éléments (fonctions dans H^∞).

On déduit de (3. 8) que

$$m\,Au = \Theta\Omega Au = \Theta Bu \subset \Theta\, m H^2(E^{N'}) = m\Theta H^2(E^{N'}),$$

d'où

$$Au \in \Theta H^2(E^{N'}).$$

Posons $v = P_{\mathfrak{H}(mI_K)}u$. On a alors $u - v \in mH^2(E^K)$, d'où, par (3. 8),

$$A(u-v) \in AmH^2(E^K) = mAH^2(E^K) = \Theta\Omega AH^2(E^K) \subset \Theta H^2(E^{N'}).$$

Ainsi on a

$$Av = Au - A(u-v) \in \Theta H^2(E^N)$$

et par conséquent $Xv = P_{\mathfrak{H}(\Theta)}Av = 0$. Puisque X est inversible, cela entraîne $v=0$, donc $u \perp \mathfrak{H}(m\,I_K)$, $u \in mH^2(E^K)$. Résumons:

(3. 9) $\qquad u \in H^2(E^K)$ et $Bu \in mH^2(E^{N'})$ entraînent $u \in mH^2(E^K)$.

Soient $b_{ij}(\lambda)$ $(i=1, \dots, N';\ j=1, \dots, K)$ les éléments de la matrice $B(\lambda)$; les fonctions $b_{ij}(\lambda)$ appartiennent à H^∞. Il est impossible que toutes ces fonctions soient divisibles par $m(\lambda)$ parce que, autrement, (3. 9) entraînerait $u \in mH^2(E^K)$ pour *toute fonction* $u \in H^2(E^K)$ et par conséquent $m(\lambda)$ serait constante: contradiction.

Il existe donc un mineur de la matrice $[b_{ij}(\lambda)]$ dont le déterminant $\Delta(\lambda)$ $(\in H^\infty)$ n'est pas divisible par $m(\lambda)$ et dont l'ordre est maximal. Il ne restreint pas la généralité de supposer que c'est le mineur

$$[b_{ij}(\lambda)] \qquad (i=1, \dots, r;\ j=1, \dots, r).$$

On a évidemment $1 \leqq r \leqq \min\{K, N'\}$:

Supposons que $K > N'$ et montrons que cela nous conduit à une contradiction. Envisageons à cet effet le déterminant

$$\begin{vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1r} & b_{1,r+1} \\ \vdots & & & \vdots \\ b_{r1} & \dots & b_{rr} & b_{r,r+1} \\ x_1 & \dots & x_r & x_{r+1} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{r+1} x_j u_j$$

que nous avons développé suivant sa dernière ligne. On a alors

$$\sum_{j=1}^{r+1} b_{ij}u_j = \begin{cases} 0 \text{ pour } i=1, \dots, r; \\ \text{le déterminant d'un mineur d'ordre } r+1 \text{ de } B(\lambda) \text{ pour } i = r+1, \dots, N'. \end{cases}$$

Par conséquent, en posant

$$u = [u_1, \dots, u_{r+1}, 0, \dots, 0] \qquad (K \text{ composantes})$$

on aura $u \in H^2(E^K)$ tel que $(Bu)_i$ est divisible par m pour $i = 1, \dots, N'$, donc

$Bu \in mH^2(E^{N'})$. En vertu de (3.9) cela entraîne que $u \in mH^2(E^K)$, ce qui est impossible puisque u_{r+1} $(=\Delta)$ n'est pas divisible par m.

On a donc nécessairement $K \leqq N'$, ce qui achève la démonstration de la proposition 2.

4. Démonstration de la proposition 3

1. Posons $S = S(m_1, \ldots, m_K)$ et $S' = S(m'_1, \ldots, m'_{K'})$. Il suffit de démontrer que $K \leqq K'$ et que m_j est un diviseur de m'_j pour $j = 1, \ldots, K$, car les relations de sens opposé s'ensuivent de celles-ci en les appliquant au couple $\{S'^*, S^*\}$ au lieu du couple $\{S, S'\}$.

L'inégalité $K \leqq K'$ découle immédiatement de la proposition 2 parce qu'il est évident que $S' \in C_0(K')$.

Par hypothèse il existe une quasi-affinité

$$X\colon \mathfrak{H} = \mathfrak{H}(m_1) \oplus \cdots \oplus \mathfrak{H}(m_K) \to \mathfrak{H}(m'_1) \oplus \cdots \oplus \mathfrak{H}(m'_{K'}) = \mathfrak{H}'$$

telle que $S'X = XS$.

Fixons un k, $1 \leqq k \leqq K$, et posons

$$\mathfrak{M}_k = \overline{m'_k(S)\mathfrak{H}} \quad \text{et} \quad \mathfrak{M}'_k = \overline{m'_k(S')\mathfrak{H}'}.$$

Puisque

$$\overline{X\mathfrak{M}_k} = \overline{Xm'_k(S)\mathfrak{H}} = \overline{m'_k(S')X\mathfrak{H}} = \overline{m'_k(S')\mathfrak{H}'} = \mathfrak{M}'_k,$$

on voit que $X_k = X|\mathfrak{M}_k$ est une quasi-affinité de $\mathfrak{M}_k$ à $\mathfrak{M}'_k$. Il est manifeste que $\mathfrak{M}_k$ est invariant pour S, et $\mathfrak{M}'_k$ pour S', et que de plus les restrictions

$$Z_k = S|\mathfrak{M}_k, \quad Z'_k = S'|\mathfrak{M}'_k$$

vérifient la relation

$$Z'_k X_k = X_k Z_k;$$

Z_k est donc une transformée quasi-affine de Z'_k.

Introduisons les notations suivantes:

$$\mathfrak{H}_i = \mathfrak{H}(m_i), \quad S_i = S(m_i), \quad \mathfrak{H}_{ik} = \overline{m'_k(S_i)\mathfrak{H}_i}, \quad S_{ik} = S_i|\mathfrak{H}_{ik} \qquad (i = 1, \ldots, K),$$

$$\mathfrak{H}'_j = \mathfrak{H}(m'_j), \quad S'_j = S(m'_j), \quad \mathfrak{H}'_{jk} = \overline{m'_k(S'_j)\mathfrak{H}'_j}, \quad S'_{jk} = S'_j|\mathfrak{H}'_{jk} \qquad (j = 1, \ldots, K');$$

il est évident que

$$Z_k = S_{1k} \oplus \cdots \oplus S_{Kk} \quad \text{et} \quad Z'_k = S'_{1k} \oplus \cdots \oplus S'_{K'k}.$$

Chacun des termes aux seconds membres est un opérateur de classe $C_0(N)$ avec $N = 1$ ou 0, et d'après le lemme 2 qu'on va établir tout de suite, les fonctions minimum correspondantes sont

$$(4.1) \quad m_{S_{ik}} = \frac{m_i}{m_i \wedge m'_k} \quad (i = 1, \ldots, K) \quad \text{et} \quad m_{S'_{jk}} = \frac{m'_j}{m'_j \wedge m'_k} \quad (j = 1, \ldots, K'),$$

où le signe $\wedge$ indique le plus grand diviseur intérieur des fonctions intérieures en question.

Désignons les fonctions (4. 1) plus simplement par m_{ik} et m'_{jk}, selon les cas. S_{ik} est unitairement équivalent à $S(m_{ik})$ et S'_{jk} est unitairement équivalent à $S(m'_{jk})$, donc leurs sommes orthogonales Z_k et Z'_k sont unitairement équivalentes à

$$U_k = S(m_{1k})\oplus\cdots\oplus S(m_{Kk}) \quad \text{et} \quad U'_k = S(m'_{1k})\oplus\cdots\oplus S(m'_{K'k}),$$

selon les cas. Il s'ensuit que U_k est une transformée quasi-affine de U'_k. De plus on a $U_k\in C_0(N_k)$ et $U'_k\in C_0(N'_k)$ où N_k est le nombre des fonctions m_{ik} $(i=1, \ldots, K)$ non-constantes, et de même pour N'_k. Or, en vertu du lemme 2, $m_{i+1,k}$ est un diviseur de m_{ik}, et $m'_{j+1,k}$ est un diviseur de m'_{jk}. Puisque $m'_{kk}=1$, on a donc $N'_k \leqq k-1$.

Supposons que m_k n'est pas un diviseur de m'_k. Dans ce cas $m_k\wedge m'_k$ ne coïncide pas avec m_k, donc m_{kk} n'est pas constante et par conséquent $N_k\geqq k$. Comme on peut écarter de la somme orthogonale U_k les termes égaux à O (donc correspondant aux fonctions m_{ik} constantes), on obtient en appliquant la proposition 2 que

$$k \leqq N_k \leqq N'_k \leqq k-1.$$

Cette contradiction prouve que m_k est un diviseur de m'_k.

Comme k était arbitraire, la démonstration de la proposition est complète.

2. Nous avons fait usage du suivant

Lemme 2. a) *Soit T une contraction de classe C_0 dans l'espace $\mathfrak{H}$ et soit p une fonction scalaire intérieure quelconque. Le sous-espace $\mathfrak{H}_p=\overline{p(T)\mathfrak{H}}$ est invariant pour T et la restriction $T_p=T|\mathfrak{H}_p$ a sa fonction minimum m_{T_p} égale à $m_T/(m_T\wedge p)$.*

b) *Si m, m', p sont des fonctions scalaires intérieures et m est un diviseur de m', alors $m/(m\wedge p)$ est un diviseur de $m'/(m'\wedge p)$.*

Démonstration. a) L'invariance de $\mathfrak{H}_p$ pour T est évidente. Pour une fonction scalaire intérieure quelconque u on a

$$\overline{u(T_p)\mathfrak{H}_p}=\overline{u(T)\overline{p(T)\mathfrak{H}}}=\overline{u(T)p(T)\mathfrak{H}}.$$

Pour qu'on ait $u(T_p)=O$ il faut donc et il suffit que $u(T)p(T)=O$, c'est-à-dire que up soit un multiple de m_T. Or, si $up=m_Tv$ pour une fonction intérieure v, on a

$$up' = m'v \quad \text{pour} \quad p' = \frac{p}{m_T\wedge p} \quad \text{et} \quad m' = \frac{m_T}{m_T\wedge p}; \tag{4. 2}$$

comme $p'\wedge m'=1$, on déduit de (4. 2) que u est divisible par m'. D'autre part, $u=m'$ vérifie (4. 2) avec $v=p'$. On conclut que $m_{T_p}=m'$.

b) Une partie du raisonnement ci-dessus fournit que pour des fonctions intérieures m, p quelconques on a

$$\frac{m}{m\wedge p} = \bigwedge_{u\in A(m,p)} u$$

où $A(m, p)$ désigne l'ensemble des fonctions intérieures u pour lesquelles up est divisible par m. Or, si m est un diviseur de m', on a $A(m, p) \supset A(m', p)$ et par conséquent $\bigwedge_{u \in A(m,p)} u$ est un diviseur de $\bigwedge_{u \in A(m',p)} u$.

PARTIE II

5. Le théorème sur le bicommutant et sa démonstration

Pour une contraction complètement non-unitaire T dans l'espace $\mathfrak{H}$ on désigne par N_T la classe des fonctions $\varphi(\lambda) = \dfrac{u(\lambda)}{v(\lambda)}$ telles que $u, v \in H^\infty$ et que $v(T)$ a un inverse à domaine dense dans $\mathfrak{H}$. Pour telle fonction φ on définit $\varphi(T) = v(T)^{-1}u(T)$; $\varphi(T)$ est un opérateur non nécessairement borné, mais fermé et de domaine dense dans $\mathfrak{H}$. (*Cf.* le chap. IV de l'édition anglaise de [1].)

Tout opérateur borné B dans $\mathfrak{H}$, qui permute à T, permute aussi à $\varphi(T)$:

$$\varphi(T)B \supset B\varphi(T).$$

Nous allons montrer que cette propriété est caractéristique des fonctions $\varphi(T)$, du moins pour T de type envisagé dans le théorème 2 et pour $\varphi(T)$ borné. Notamment, on a le suivant

Théorème 3. *Pour un opérateur T dans $\mathfrak{H}$, de type envisagé dans le théorème* 2, *tout opérateur $A \in (T)''$ est de la forme $A = \varphi(T)$ où $\varphi \in N_T$.*

Démonstration. D'après le théorème 2, T est quasi-similaire à un opérateur de Jordan

$$S = S(m_1) \oplus \cdots \oplus S(m_K) \quad \text{dans} \quad \mathfrak{G} = \mathfrak{H}(m_1) \oplus \cdots \oplus \mathfrak{H}(m_K).$$

Soient

$$X\colon \mathfrak{G} \to \mathfrak{H} \quad \text{et} \quad Y\colon \mathfrak{H} \to \mathfrak{G}$$

des quasi-affinités pour lesquelles

$$TX = XS \quad \text{et} \quad SY = YT. \tag{5. 1}$$

D'après le lemme 1 du n°3 il existe, pour $k = 1, \ldots, K$, un sous-espace $\mathfrak{H}_k^0$ de $\mathfrak{H}(m_1)$, invariant pour $S(m_1)$ et tel que

$$S_k^0 = S(m_1)|\mathfrak{H}_k^0$$

soit unitairement équivalent à $S(m_k)$:

$$S_k^0 R_k = R_k S(m_k) \quad \text{avec} \quad R_k\colon \mathfrak{H}(m_k) \to \mathfrak{H}_k^0 \quad \text{unitaire.} \tag{5. 2}$$

Notons que $\mathfrak{H}_1^0=\mathfrak{H}(m_1)$ et $S_1^0=S(m_1)$. De plus il existe un opérateur borné Q_k de $\mathfrak{H}(m_1)$ à $\mathfrak{H}(m_k)$ tel que

$$S(m_k)Q_k=Q_k S(m_1) \quad \text{et} \quad Q_k\mathfrak{H}(m_1)=\mathfrak{H}(m_k). \tag{5. 3}$$

Auprès de l'opérateur S dans $\mathfrak{G}$, envisageons aussi les opérateurs

$$S^0 = S_1^0\oplus\cdots\oplus S_K^0 \quad \text{dans} \quad \mathfrak{G}^0 = \mathfrak{H}_1^0\oplus\cdots\oplus\mathfrak{H}_K^0$$

et

$$\hat{S} = S(m_1)\oplus\cdots\oplus S(m_1) \quad \text{dans} \quad \hat{\mathfrak{G}} = \mathfrak{H}(m_1)\oplus\cdots\oplus\mathfrak{H}(m_1) \qquad (K \text{ termes}).$$

Posons

$$R = R_1\oplus\cdots\oplus R_K \quad \text{et} \quad Q = Q_1\oplus\cdots\oplus Q_K;$$

il s'ensuit de (5. 2) et (5. 3) que R est unitaire,

$$R\mathfrak{G} = \mathfrak{G}^0, \quad S^0R = RS, \tag{5. 4}$$

et

$$Q\hat{\mathfrak{G}} = \mathfrak{G}, \quad SQ = Q\hat{S}. \tag{5. 5}$$

De (5. 1) et (5. 4) on obtient $S^0RY=RYT$; comme S^0 est évidemment la restriction de S à $\mathfrak{G}^0$, cette relation peut s'écrire aussi sous la forme

$$\hat{S}RY=RYT. \tag{5. 6}$$

Soit W un opérateur borné quelconque dans $\hat{\mathfrak{G}}$ permutant à $\hat{S}$. Grâce à (5. 1), (5. 5) et (5. 6) on a

$$TXQWRY=XSQWRY=XQ\hat{S}WRY=XQW\hat{S}RY=XQWRSY=XQWRYT,$$

donc $XQWRY$ permute à T. Il permute alors à tout opérateur A dans $(T)''$, donc on a

$$AXQ\cdot W\cdot RY = XQ\cdot W\cdot RYA.$$

En posant

$$B=RYAXQ \quad \text{et} \quad C=RYXQ$$

il en dérive la relation

$$BWC=CWB. \tag{5. 7}$$

Observons que B et C permutent à $\hat{S}$; en effet on a

$$\hat{S}B = \hat{S}RYAXQ \overset{(5.6)}{=\!=} RYTAXQ = RYATXQ \overset{(5.1)}{=\!=} RYAXSQ \overset{(5.5)}{=\!=} RYAXQ\hat{S} = B\hat{S}$$

et de même pour C (cas $A=I$).

Par leur définition, les opérateurs B et C appliquent l'espace $\hat{\mathfrak{G}}$ dans l'espace $\mathfrak{G}^0$. Comme $\mathfrak{G}^0\subset\hat{\mathfrak{G}}$, on peut les considérer aussi comme des opérateurs dans $\hat{\mathfrak{G}}$. Soient

$$W=[W_{ij}], \quad B=[B_{ij}], \quad C=[C_{ij}] \qquad (i,j=1,\ldots,K)$$

les matrices de ces opérateurs correspondant à la décomposition $\hat{\mathfrak{G}} = \mathfrak{H}(m_1)\oplus\cdots$ $\cdots\oplus\mathfrak{H}(m_1)$. Les éléments de ces matrices sont des opérateurs bornés dans $\mathfrak{H}(m_1)$ permutant à $S(m_1)$.

Comme W peut être une matrice quelconque $[W_{ij}]$ dont les éléments permutent à $S(m_1)$, on peut choisir en particulier $W_{ij}=I$ pour $(i,j)=(k,1)$ et $W_{ij}=O$ pour $(i,j)\neq(k,1)$. On obtient alors de (5. 7)

$$(5.8) \qquad B_{ik}C_{1j}=C_{ik}B_{1j} \qquad (i,k,j=1,\ldots,K).$$

Observons que $C\ (=RYXQ)$ applique $\hat{\mathfrak{G}}$ sur une variété dense dans $\mathfrak{G}^0$. Cela s'ensuit de (5. 4), (5. 5) et de ce que X et Y sont des quasi-affinités. Les composantes de rang 1 des vecteurs dans $C\hat{\mathfrak{G}}$ font alors une variété dense dans la composante de rang 1 de $\mathfrak{G}^0$, c'est-à-dire dans $\mathfrak{H}(m_1)$. Cela veut dire que les éléments de la forme

$$\sum_{j=1}^{K} C_{1j}g_j \quad (g_j\in\mathfrak{H}(m_1))$$

sont denses dans $\mathfrak{H}(m_1)$, donc pour tout $g\in\mathfrak{H}(m_1)$ il existe des $g_j^{(n)}\in\mathfrak{H}(m_1)$ $(j=1,\ldots,K;\ n=1,2,\ldots)$ tels que

$$g=\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{K} C_{1j}g_j^{(n)},$$

d'où en vertu de (5. 8) on déduit que

$$(5.9) \qquad B_{ik}g=\lim_{n\to\infty}C_{ik}\sum_{j=1}^{K}B_{1j}g_j^{(n)} \qquad (i,k=1,\ldots,K).$$

Comme B_{ik} et C_{ik} permutent à $S(m_1)$, il s'ensuit par le théorème déjà cité de Sarason [6] qu'il existe des fonctions $b_{ik}, c_{ik}\in H^\infty$ pour lesquelles

$$B_{ik}=b_{ik}(S(m_1)) \quad \text{et} \quad C_{ik}=c_{ik}(S(m_1)).$$

Les relations (5. 8) impliquent

$$(5.10) \qquad b_{ik}c_{1j}-c_{ik}b_{1j}\in m_1H^2 \qquad (i,k,j=1,\ldots,K)$$

et (5. 9) entraîne, en l'appliquant au cas $g=1-\overline{m_1(0)}\,m_1\ \big(\in\mathfrak{H}(m_1)\big)$, que

$$(5.11) \qquad b_{ik}=\lim_{n\to\infty}[c_{ik}h_{ik}^{(n)}+m_1l_{ik}^{(n)}]$$

où $h_{ik}^{(n)}, l_{ik}^{(n)}\in H^2$ et la convergence est dans la métrique hilbertienne de H^2. De (5.11) on déduit que tout diviseur intérieur commun de c_{ik} et m_1 est un diviseur de b_{ik} aussi.

Envisageons en particulier le plus grand diviseur intérieur commun de c_{1j} et m_1, que nous désignons par p_j (lorsque $c_{1j}=0$ on a $p_j=m_1$). Posons

$$b'_j = b_{1j}/p_j, \quad c'_j = c_{1j}/p_j \quad \text{et} \quad m'_j = m_1/p_j \qquad (j = 1, \dots, K);$$

en vertu de (5. 10) on a

$$b_{ik}c'_j - c_{ik}b'_j = m'_j u_{ikj}, \quad u_{ikj} \in H^2. \tag{5. 12}$$

Notons que b'_j, c'_j et m'_j appartiennent à H^∞, m'_j est même une fonction intérieure, et c'_j et m'_j n'ont pas de diviseur intérieur non-constant.

Puisque chaque m'_j est un diviseur de m_1, $M=m'_1 \vee \dots \vee m'_K$ (le plus petit multiple intérieur commun de $m'_1, \dots, m'_K$) est aussi un diviseur de m_1. Observons aussi que

$$q = m_1/M$$

est un diviseur de $m_1/m'_j = p_j$ pour $j=1, \dots, K$. Par conséquent q est un diviseur de c_{1j}, donc $c_{1j}=qd_j$ où $d_j \in H^\infty$ $(j=1, \dots, K)$. Comme on a alors

$$\sum_{j=1}^{K} C_{1j}g_j = \sum_{j=1}^{K} c_{1j}(S(m_1))g_j = q(S(m_1)) \sum_{j=1}^{K} d_j(S(m_1))g_j$$

pour $g_j \in \mathfrak{H}(m_1)$ et que ces éléments sont denses dans $\mathfrak{H}(m_1)$, on conclut que, à fortiori,

$$\overline{q(S(m_1))\,\mathfrak{H}(m_1)} = \mathfrak{H}(m_1).$$

D'après le lemme 2 (n°4) cela entraîne que $m_1/(q \wedge m_1) = m_1$, $q \wedge m_1 = 1$, donc (q étant un diviseur de m_1) $q=1$. Ainsi on a

$$m_1 = m'_1 \vee \dots \vee m'_K.$$

En appliquant un lemme sur l'arithmétique des fonctions intérieures, démontré dans [2], on conclut qu'il existe des fonctions intérieures m''_k $(k=1, \dots, K)$ telles que

a) m''_k est un diviseur de m'_k,

b) $m''_k \wedge m''_h = 1$ pour $k \neq h$,

c) $m_1 = m''_1 \vee \dots \vee m''_K$ $(= m''_1 \cdots m''_k)$.

Nous déduisons de (5. 12) que

$$b_{ik}v - c_{ik}w = m_1 z \tag{5. 13}$$

où

$$v = \sum_{j=1}^{K} m''_1 \dots m''_{j-1} c'_j m''_{j+1} \dots m''_K, \quad w = \sum_{j=1}^{K} m''_1 \dots m''_{j-1} b'_j m''_{j+1} \dots m''_K \in H^\infty$$

et

$$z = \frac{1}{m_1} \sum_{j=1}^{K} m''_1 \dots m''_{j-1} m'_j u_{ikj} m''_{j+1} \dots m''_K = \sum_{j=1}^{K} \frac{m'_j}{m''_j} u_{ikj} \in H^2.$$

Soit r un diviseur intérieur commun de v et m_1 (dans H^∞). Puisque la factorisation $m_1 = m_1'' \cdots m_K''$ est en facteurs premiers deux-à-deux, on a pour r une factorisation correspondante $r = r_1 \cdots r_K$ où chaque r_k est un diviseur de m_k''. Comme m_k'' figure dans tous les termes de la somme définissant v sauf dans celui de rang $j=k$, r_k est un diviseur de tous ces termes. Comme d'autre part r_k est un diviseur de v, il doit être un diviseur aussi du terme de rang $j=k$. Or on a $m_k'' \wedge m_i'' = 1$ et à fortiori $r_k \wedge m_i'' = 1$ pour $i \neq k$, d'où il s'ensuit que r_k doit être un diviseur de c_k'. Mais c_k' et m_k' n'ont pas de diviseur commun non-constant, donc $r_k = 1$. Cela étant valable pour $k = 1, \ldots, K$, on a aussi $r = 1$.

Ainsi, nous venons de démontrer que les fonctions v et m_1 n'ont pas de diviseur intérieur commun non-constant. On en fera usage tout à l'heure.

De (5. 13) il dérive que

$$B_{ik} v(S(m_1)) - C_{ik} w(S(m_1)) = O \qquad (i, k = 1, \ldots, K),$$

d'où

$$Bv(\hat{S}) - Cw(\hat{S}) = O, \quad RY[AXQv(\hat{S}) - XQw(\hat{S})] = O$$

et par conséquent

$$AXQv(\hat{S}) - XQw(\hat{S}) = O. \tag{5.14}$$

Or (5. 5) entraîne $Q v(\hat{S}) = v(S)Q$ et (5. 1) entraîne $Xv(S) = v(T)X$, donc on a $XQv(\hat{S}) = v(T)XQ$ et la même chose pour w; par (5.14) il en résulte que

$$(Av(T) - w(T))XQ = O.$$

Puisque $\overline{XQ\hat{\mathfrak{G}}} = \overline{X\mathfrak{G}} = \mathfrak{H}$, *cf.* (5. 5), cela entraîne

$$Av(T) - w(T) = O.$$

Finalement, le fait que v et $m_1 (= m_T)$ n'ont pas de diviseur intérieur commun non-constant, entraîne que la fonction v appartient à la classe K_T, c'est-à-dire que $v(T)$ admet un inverse à domaine dense dans $\mathfrak{H}$.[11]) Vu aussi que, évidemment, A permute à $v(T)$, on conclut que $\varphi = w/v$ appartient à la classe N_T et qu'on a $A = \varphi(T)$.

---

[11]) Comme m_T n'est pas constante, le fait que v et m_T n'ont pas de diviseur commun intérieur non-constant exclue la possibilité $v=0$. Soit $v = v_e\, v_i$ la factorisation canonique de v en ses facteurs extérieur v_e et intérieur v_i. On a $v(T) = v_e(T) v_i(T)$, et $v_e(T)$ est inversible (*cf.* n° III. 3 de [1]). Puisque $m_T(T)h = 0$ pour tout $h \in \mathfrak{H}$, il s'ensuit du lemme III.4.5 de [1] que $v_i(T)h = 0$ pour un h entraîne $(v_i \wedge m_T)(T)h = 0$. Comme dans notre cas $v_i \wedge m_T = 1$, cela veut dire que $h = 0$; donc $v_i(T)$ est aussi inversible. Ainsi $v(T)$ est inversible. — En appliquant le même raisonnement à $v^\sim$, $m_1^\sim$ et T^*, on obtient que $v(T)^* \; (= v^\sim(T^*))$ est aussi inversible. Cela prouve que $v(T)^{-1}$ a domaine dense dans $\mathfrak{H}$.

Cela achève la démonstration du théorème 3.

Corollaire. *Soit $T \in C_0(N)$. Pour que T soit sans multiplicité* (dans le sens de [2]) *il faut et il suffit que l'algèbre $(T)'$, formée par les opérateurs bornés permutables à T, soit commutative.*

En effet, l'une des propriétés caractérisant les opérateurs sans multiplicité T de classe $C_0(N)$ est que tout $B \in (T)'$ est de la forme $B = \varphi(T)$ avec $\varphi \in N_T$. Donc, si T est sans multiplicité, $(T)'$ est commutatif. Inversement, si $(T)'$ est commutatif, on a $(T)' = (T)''$, et par conséquent, en vertu du théorème 3, tout opérateur dans $(T)'$ est de la forme $\varphi(T)$.

6. Le rôle de la classe N_T des fonctions

Les opérateurs A qu'on a envisagés dans le théorème 3 étaient bornés, mais les fonctions $\varphi(\lambda)$ par lesquelles on les a représentés sous la forme $A = \varphi(T)$ étaient non nécessairement bornées dans le disque unité $|\lambda| < 1$. La question se pose s'il existe même une représentation $A = w(T)$ par une fonction bornée dans ce disque, c'est-à-dire par $w \in H^\infty$.

Nous allons montrer par un contre-exemple que cela n'est pas le cas. En effet, *nous construisons un opérateur $T \in C_0(2)$ et un opérateur borné B tels que B peut être représenté sous la forme $B = \varphi(T)$ avec $\varphi \in N_T$, mais ne peut pas être représenté sous la forme $B = w(T)$ avec $w \in H^\infty$.*

Pour commencer nous choisissons deux fonctions intérieures scalaires non-constantes $u(\lambda)$ et $v(\lambda)$ telles que

$$u \wedge v = 1; \tag{6. 1}$$

on les précisera plus tard. On définit alors la fonction $\{E^2, E^2, \Theta(\lambda)\}$ par la matrice

$$\Theta(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} u(\lambda) & u(\lambda) \\ v(\lambda) & -v(\lambda) \end{bmatrix}; \tag{6. 2}$$

c'est évidemment une fonction intérieure, contractive pure, donc l'opérateur $T = S(\Theta)$ qu'elle engendre dans l'espace $\mathfrak{H}(\Theta)$ est de classe $C_0(2)$. La condition (6. 1) entraîne que la fonction minimum de T est égale au déterminant de la matrice $\Theta(\lambda)$. En vertu du théorème 2 de [2], T est alors sans multiplicité et par suite tout opérateur $B \in (T)'$ est de la forme $B = \varphi(T)$ avec $\varphi \in N_T$.

Envisageons en particulier l'opérateur B défini dans $\mathfrak{H}(\Theta)$ par

$$Bh = P_{\mathfrak{H}(\Theta)} Jh \quad \text{où} \quad J = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

B est évidemment borné, et comme on a

(6. 3) $$J\Theta = \Theta J' \quad \text{où} \quad J' = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

B permute à T (*cf.* théorème 2 de [4]). Ainsi on a $B=\varphi(T)$ pour une fonction $\varphi\in N_T$. Supposons qu'on a aussi

(6. 4) $$B=w(T)$$

pour une fonction $w\in H^\infty$. Or, pour notre $T=S(\Theta)$, l'opérateur $w(T)$ s'obtient par la formule

$$w(T)h=P_{\mathfrak{H}(\Theta)}(wh) \qquad (h\in\mathfrak{H}(\Theta)),$$

ainsi (6. 4) veut dire que $P_{\mathfrak{H}(\Theta)}(wh-Jh)=0$, donc

(6. 5) $$wh-Jh\in\Theta H^2(E^2)$$

et cela pour tout $h\in\mathfrak{H}(\Theta)$. Comme tout élément de la forme $h=(I_2-\Theta(\lambda)\Theta(0)^*)x$, où $x\in E^2$, appartient à $\mathfrak{H}(\Theta)$, on obtient de (6. 5), en faisant usage aussi de (6. 3), que pour tout $x\in E^2$ il existe un $y\in H^2(E^2)$ tel que

(6. 6) $$(wI_2-J)x=\Theta y;$$

vu que $\Theta(e^{it})$ est unitaire p. p. sur le cercle unité et que $w\in H^\infty$, il s'ensuit même que $y\in H^\infty(E^2)$. Soient $y_1=[y_{11},y_{21}]$ et $y_2=[y_{12},y_{22}]$ les éléments de $H^\infty(E^2)$ qui correspondent de cette façon aux vecteurs $x_1=[1,0]$ et $x_2=[0,1]$ de E^2; on déduit de (6. 2) et (6. 6) que

$$w+1=\frac{1}{\sqrt{2}}u(y_{11}+y_{21}), \qquad w-1=\frac{1}{\sqrt{2}}v(y_{12}-y_{22}),$$

d'où

(6. 7) $$1=ua+vb, \quad \text{avec} \quad a=\frac{1}{2\sqrt{2}}(y_{11}+y_{21})\in H^\infty, \quad b=\frac{1}{2\sqrt{2}}(-y_{12}+y_{22})\in H^\infty.$$

Or il est possible de choisir u et v de façon que telle équation soit impossible; c'est le cas par exemple si $u(\lambda)=\exp\left(\frac{\lambda+1}{\lambda-1}\right)$ et $v(\lambda)$ est un produit de Blaschke dont les zéros sont réels et tendent vers 1 (*cf.* le n°8.2 de [2]). Tel choix de u et v rend donc l'équation (6. 4) impossible pour $w\in H^\infty$.

7. Décomposition approximative pour un opérateur de classe $C_0(N)$

D'après une définition due à KISILEVSKY [5] (*cf.* aussi [7]) l'espace de Hilbert $\mathfrak{K}$ est appelé *somme approximative* de ses sous-espaces $\mathfrak{K}_j$ $(j\in\Gamma)$ si l'on a

$$\mathfrak{K} = \bigvee_{j\in\Gamma} \mathfrak{K}_j \tag{7.1}$$

et

$$(\bigvee_{j\in\Gamma'} \mathfrak{K}_j)\cap(\bigvee_{j\in\Gamma''} \mathfrak{K}_j) = \{0\} \tag{7.2}$$

pour toute partition de l'ensemble des indices Γ en parties disjointes non vides Γ' et Γ''.

Théorème 4. *Pour un opérateur T dans l'espace $\mathfrak{K}$, de classe $C_0(N)$ $(N\geqq 1)$, les propriétés suivantes sont équivalentes:*

(i) *T est quasi-similaire à l'opérateur de Jordan $S=S(m_1, \ldots, m_K)$ défini dans l'espace $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}(m_1)\oplus\cdots\oplus\mathfrak{H}(m_K)$;*

(ii) *Il existe une décomposition de $\mathfrak{K}$ en somme approximative de sous-espaces $\mathfrak{K}_1, \ldots, \mathfrak{K}_K$ invariants pour T, telle que chaque $T_j=T|\mathfrak{K}_j$ est sans multiplicité et m_j $(=m_{T_j})$ est un diviseur de m_{j-1} (pour $j>1$).*

Démonstration. (ii)$\to$(i). Comme T_j est sans multiplicité, il existe une quasi-affinité X_j: $\mathfrak{H}(m_j)\to\mathfrak{K}_j$ telle que $TX_j=X_jS(m_j)$; *cf.* [2]. En définissant

$$X(h_1\oplus\cdots\oplus h_K) = \sum_{j=1}^{K} X_j h_j$$

pour $h_j\in\mathfrak{H}(m_j)$ $(j=1, \ldots, K)$, on obtient un opérateur X: $\mathfrak{H}\to\mathfrak{K}$, évidemment borné et tel que $XS(m_1, \ldots, m_K)=TX$. De (7. 1) il dérive que $\overline{X\mathfrak{H}}=\mathfrak{K}$, et de (7. 2) il dérive que $Xh=0$ entraîne $h=0$; donc X est une quasi-affinité. En vertu du théorème 2, $S(m_1, \ldots, m_K)$ est alors quasi-similaire à T.

(i)$\to$(ii). Soient X: $\mathfrak{H}\to\mathfrak{K}$ et Y: $\mathfrak{K}\to\mathfrak{H}$ des quasi-affinités vérifiant les relations $TX=XS$ et $SY=YT$. Posons

$$\mathfrak{H}_j=\mathfrak{H}(m_j) \quad \text{et} \quad \mathfrak{K}_j=\overline{X\mathfrak{H}_j} \qquad (j=1, \ldots, K);$$

$\mathfrak{K}_j$ est invariant pour T, $X_j=X|\mathfrak{H}_j$ est une quasi-affinité $\mathfrak{H}_j\to\mathfrak{K}_j$, et pour $T_j=T|\mathfrak{K}_j$ on a $T_jX_j=X_jS(m_j)$, d'où il s'ensuit que T_j est sans multiplicité et que $m_{T_j}=m_j$. La relation (7. 1) est manifeste (pour $\Gamma=\{1, \ldots, K\}$). Il reste à démontrer (7. 2).

Posons à cet effet $\mathfrak{H}' = \bigoplus_{j\in\Gamma'} \mathfrak{H}_j$, $\mathfrak{H}'' = \bigoplus_{j\in\Gamma''} \mathfrak{H}_j$, $\mathfrak{K}' = \bigvee_{j\in\Gamma'} \mathfrak{K}_j$ et $\mathfrak{K}''= \bigvee_{j\in\Gamma''} \mathfrak{K}_j$; il est manifeste que $\mathfrak{K}'=\overline{X\mathfrak{H}'}$ et $\mathfrak{K}''=\overline{X\mathfrak{H}''}$. Envisageons alors la somme directe

$$\mathfrak{K}_\circ = \mathfrak{K}'\oplus\mathfrak{K}''$$

et son opérateur

$$T_\circ = (T|\mathfrak{K}')\oplus(T|\mathfrak{K}''),$$

qui est évidemment aussi d'une classe $C_0(N_\circ)$, $N_\circ \geqq 1$. En posant

$$X_\circ(h'+h'') = Xh' \oplus Xh'' \quad \text{pour} \quad h' \in \mathfrak{H}', \quad h'' \in \mathfrak{H}'',$$

on définit une quasi-affinité $X_\circ$: $\mathfrak{H} \to \mathfrak{K}_\circ$ telle que

$$T_\circ X_\circ = X_\circ S. \tag{7. 3}$$

D'autre part, en posant

$$Y_\circ(k' \oplus k'') = Y(k'+k'') \quad \text{pour} \quad k' \in \mathfrak{K}', \ k'' \in \mathfrak{K}'',$$

on définit un opérateur borné $Y_\circ$: $\mathfrak{K}_\circ \to \mathfrak{H}$, avec $Y_\circ \mathfrak{K}_\circ$ dense dans $\mathfrak{H}$ et tel que

$$SY_\circ = Y_\circ T_\circ. \tag{7. 4}$$

L'opérateur $Z_\circ = Y_\circ^*$: $\mathfrak{H} \to \mathfrak{K}_\circ$ est alors inversible et tel que

$$Z_\circ S^* = T_\circ^* Z_\circ; \tag{7. 5}$$

de (7. 5) on déduit que $\overline{Z_\circ \mathfrak{H}}$ est invariant pour $T_\circ^*$. En désignant par $[T_\circ^*]$ la restriction de $T_\circ^*$ à ce sous-espace, on aura

$$[Z_\circ] S^* = [T_\circ^*][Z_\circ] \tag{7. 6}$$

où $[Z_\circ]$ désigne la quasi-affinité $\mathfrak{H} \to \overline{Z_\circ \mathfrak{H}}$ induite par $Z_\circ$. En vertu de (7. 6) on a donc $[T_\circ^*] \succ S^*$; par conséquent $[T_\circ^*]$ a le modèle de Jordan $S^* = S(\tilde{m_1}, \ldots, \tilde{m_K})$. D'autre part, (7. 3) entraîne que $T_\circ^*$ a aussi le modèle de Jordan égal à S^*. En vertu du corollaire 2 du théorème 2 cela n'est possible que si $\overline{Z_\circ \mathfrak{H}} = \mathfrak{K}_\circ$. On conclut que $Z_\circ$ — et alors $Y_\circ$ aussi — sont des quasi-affinités.

Cela entraîne (7. 2). En effet, pour $k \in \mathfrak{K}' \cap \mathfrak{K}''$ on a $k_\circ = k \oplus (-k) \in \mathfrak{K}_\circ$ et $Y_\circ k_\circ = Y(k-k) = 0$, d'où, $Y_\circ$ étant inversible, on déduit que $k_\circ = 0$ et par conséquent $k = 0$.

Bibliographie

[1] B. Sz.-Nagy—C. Foiaş, *Analyse harmonique des opérateurs de l'espace de Hilbert* (Budapest, 1967).

[2] B. Sz.-Nagy—C. Foiaş, Opérateurs sans multiplicité, *Acta Sci. Math.*, **30** (1959), 1—18.

[3] B. Sz.-Nagy—C. Foiaş, Vecteurs cycliques et quasi-affinités, *Studia Math.*, **31** (1968), 35—42.

[4] B. Sz.-Nagy—C. Foiaş, Commutants de certains opérateurs, *Acta Sci. Math.*, **29** (1968), 1—17.

[5] Г. Э. Кисилевский, Об обобщении жордановой теории для класса линейных операторов в гильбертовом пространстве, *ДАН СССР*, **176** (1967), 768—770.

[6] D. Sarason, Generalized interpolation in H^∞, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **127** (1967), 179—203.

[7] М. С. Бродский, *Треугольные и жордановые представления линейных операторов* (Москва, 1969).

(Reçu le 20. février 1969)